專題教材

開 n 次方根的直式計算與原理

范志軒　編輯

壹、二次方根

在 10 進位的數字中，若要建構開次方根號的直式計算，得要先觀察數字在次方運算下的進位規律，譬如以二次方為例：

一位數字 x ：$0<x<10 \Rightarrow 0<x^2<100$

二位數字 x ：$10 \le x<100 \Rightarrow 100 \le x^2<10000$

三位數字 x ：$100 \le x<1000 \Rightarrow 10000 \le x^2<1000000$

………

n 位數字 x ：$10^{n-1} \le x<10^n \Rightarrow 10^{2(n-1)} \le x^2<10^{2n}$

上述的規律顯示：$2n$ 或 $2n-1$ 位數字的平方根為 n 位數字，因此若要反向求出二次方根，例如 622521 的平方根，可以先觀察到此數為 6 位數，所以平方根為 3 位數。

其次，若已知 622521 的平方根為 3 位數，如何決定其值？

二次方根直式計算法

(1) 首先，由小數點位置開始向左或向右每二位數標上一撇，由左至右，分成第一小節，第二小節，……，以 622521 為例，共可分成三小節，而每一小節恰可計算出平方根的一位數字

$$6\quad 2'\quad 2\quad 5'\quad 2\quad 1$$

(2) 由第一小節開始，估算出正整數 a ，使得 a^2 最接近此節的數字

將第一小節的數減去 a^2 ，連同次一小節的數字下降至下一列

取 $a=7$

$$\begin{array}{r l}
 & \quad 7 \\
 & \sqrt{6\quad 2'\quad 2\quad 5'\quad 2\quad 1} \\
a^2 = & \underline{4\quad 9\qquad\qquad\qquad\quad} \\
 & 1\quad 3\quad 2\quad 5
\end{array}$$

(3) 令 $10a=a_1$ ，估算求出正整數 b ，使得 $(2a_1+b)$ 乘以 b 最接近此列上的數

用此列上的數減去 $(2a_1+b)$ 乘以 b ，再連同次一小節的數字下降至下一列

取 $b=8$

$10a=a_1$

$$\begin{array}{r r l}
 & & \quad 7\qquad 8 \\
 & 7 & \sqrt{6\quad 2'\quad 2\quad 5'\quad 2\quad 1} \\
 & \underline{\quad 7\quad} & \underline{4\quad 9\qquad\qquad\qquad\quad} \\
(2a_1+b)= & 14\ 8 & 1\quad 3\quad 2\quad 5 \\
 & \underline{\quad 8} & \underline{1\quad 1\quad 8\quad 4\qquad} =(2a_1+b)\times b \\
 & & \quad 1\quad 4\quad 1\quad 2\quad 1
\end{array}$$

(4) 令$10\times(10a+b)=a_2$，估算求出正整數c，使得$(2a_2+c)$乘以c最接近此列上的數
用此列上的數減去$(2a_2+c)$乘以c，再連同次一小節上的數字降下至下一列

取$c=9$

$10\times(10a+b)=a_2$		$7 \quad 8 \quad 9$
	7	$\sqrt{6\ \ 2'\ \ 2\ \ 5'\ \ 2\ \ 1}$
	7	4 9
	148	1 3 2 5
	8	1 1 8 4
$(2a_2+c)=$	1569	1 4 1 2 1
	9	1 4 1 2 1 $=(2a_2+c)\times c$
		0

(5) 若此時降下的數字為 0，則開二次根號結束，平方根為$100a+10b+c$
否則令$10\times(100a+10b+c)=a_3$，繼續上述步驟，直到降下的數字為 0 或算出所要求的位數為止

計算二次方根的原理

$x=a+\beta$

$x^2=(a+\beta)^2=a^2+(2a+\beta)\beta \ \Rightarrow\ x^2-a^2=(2a+\beta)\beta$

令$\beta=b+\gamma$，代入上式

$x^2-a^2=(2a+b+\gamma)(b+\gamma)=(2a+b)b+(2a+2b+\gamma)\gamma$

$\Rightarrow x^2-a^2-(2a+b)b=(2a+2b+\gamma)\gamma$

令$\gamma=c+\omega$，代入上式

$x^2-a^2-(2a+b)b=(2a+2b+c+\omega)(c+\omega)=(2a+2b+c)c+(2a+2b+2c+\omega)\omega$

$x^2-a^2-(2a+b)b-(2a+2b+c)c=(2a+2b+2c+\omega)\omega$

…………

重複上述步驟，直到算出所要求的位數為止

由原理對直式運算作檢驗

例如對 622521 的平方根運算進行觀察

$622521=(700+\beta)^2$…………觀察兩側數字，估算得$a=700$

$\Rightarrow 622521-700^2=(2\times700+\beta)\beta$

令$\beta=80+\gamma$，代入上式…………觀察上式兩側數字，估算得$b=80$

$\Rightarrow 622521-700^2=(2\times700+80+\gamma)(80+\gamma)$

$\Rightarrow 622521-700^2-(2\times700+80)80=(2\times700+2\times80+\gamma)\gamma$

令$\gamma=9$，代入上式…………觀察上式兩側數字，估算得$c=9$

$\Rightarrow 622521-700^2-(2\times700+80)80=(2\times700+2\times80+9)9$

$\Rightarrow 622521-700^2-(2\times700+80)80-(2\times700+2\times80+9)9$

$=622521-490000-118400-14121=0$

故 62251 的平方根為$700+\beta=700+80+\gamma=700+80+9=789$

貳、三次方根

開三次方根的直式運算

若是仿照求二次方根的原理與步驟，考慮三次方根的求法，可得以下直式求法：

(1) 首先，由小數點位置開始向左或向右每三位數標上一撇，由左至右，分成第一小節，第二小節，……，而每一小節恰可計算出立方根的一位數字

(2) 由第一小節開始，估算出正整數 a，使得 a^3 最接近此節的數字並將第一小節的數減去 a^2，連同次一小節的數字下降至下一列

(3) 令 $10a=a_1$，估算求出正整數 b，使得 $\left(3a_1^2+3a_1b+b^2\right)$ 乘以 b 最接近此列上的數並用此列上的數減去 $\left(3a_1^2+3a_1b+b^2\right)$ 乘以 b ，再連同次一小節的數字下降至下一列

(4) 令 $10\times\left(10a+b\right)=a_2$，估算求出正整數 c，使得 $\left(3a_2^2+3a_2c+c^2\right)$ 乘以 c 最接近此列上的數，並用此列上的數減去 $\left(3a_2^2+3a_2c+c^2\right)$ 乘以 c ，再連同次一小節上的數字降下至下一列

(5) 若此時降下的數字為 0，則開三次根號結束，立方根為 $100a+10b+c$
否則令 $10\times\left(100a+10b+c\right)=a_3$ ，繼續上述步驟，直到降下的數字為 0 或算出所要求的位數為止

例如對 491169069 開立方根，其直式運算如下：

$$
\begin{array}{r|ccccccccc|l}
 & \multicolumn{3}{c}{\text{取}a=7} & \multicolumn{3}{c}{\text{取}b=8} & \multicolumn{3}{c|}{\text{取}c=9} & 10a=a_1 \\
 & & & 7 & & & 8 & & & 9 & 10\times\left(10a+b\right)=a_2 \\
\sqrt{} & 4 & 9 & 1' & 1 & 6 & 9' & 0 & 6 & 9 & \\
a^3= & 3 & 4 & 3 & & & & & & & \\
\hline
 & 1 & 4 & 8 & 1 & 6 & 9 & & & & \\
\left(3a_1^2+3a_1b+b^2\right)b= & 1 & 3 & 1 & 5 & 5 & 2 & & & & \\
\hline
 & & 1 & 6 & 6 & 1 & 7 & 0 & 6 & 9 & \\
\left(3a_2^2+3a_2c+c^2\right)c= & & 1 & 6 & 6 & 1 & 7 & 0 & 6 & 9 & \\
\hline
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

計算三次方根的原理

$x=a+\beta$

$x^3=\left(a+\beta\right)^3=a^3+\left(3a^2+3a\beta+\beta^2\right)\beta \quad\Rightarrow\quad x^3-a^3=\left(3a^2+3a\beta+\beta^2\right)\beta$

令 $\beta=b+\gamma$，代入上式

$x^3-a^3=\left(3a^2+3a\left(b+\gamma\right)+\left(b+\gamma\right)^2\right)\left(b+\gamma\right)=\left(3a^2+3ab+b^2\right)b+\left(3\left(a+b\right)^2+3\left(a+b\right)\gamma+\gamma^2\right)\gamma$

$\Rightarrow x^3-a^3-\left(3a^2+3ab+b^2\right)b=\left(3\left(a+b\right)^2+3\left(a+b\right)\gamma+\gamma^2\right)\gamma$

令 $\gamma=c+\omega$ ，代入上式

$x^3-a^3-\left(3a^2+3ab+b^2\right)b=\left(3\left(a+b\right)^2+3\left(a+b\right)\left(c+\omega\right)+\left(c+\omega\right)^2\right)\left(c+\omega\right)$

$=\left(3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\right)c+\left(3(a+b+c)^2+3(a+b+c)\omega+\omega^2\right)\omega$

$x^2-a^2-(2a+b)b-(2a+2b+c)c=(2a+2b+2c+\omega)\omega$

$\Rightarrow x^3-a^3-\left(3a^2+3ab+b^2\right)b-\left(3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\right)c=\left(3(a+b+c)^2+3(a+b+c)\omega+\omega^2\right)\omega$

…………

重複上述步驟，直到算出所要求的位數為止

由原理對直式運算作檢驗

例如對 491169069 的立方根運算進行觀察

$491169069=(700+\beta)^3$…………觀察兩側數字，估算得$a=700$

$\Rightarrow 491169069-700^3=\left(3\times700^2+3\times700\times\beta+\beta^2\right)\beta$

令$\beta=80+\gamma$，代入上式…………觀察上式兩側數字，估算得$b=80$

$\Rightarrow 491169069-700^3=\left(3\times700^2+3\times700\times(80+\gamma)+(80+\gamma)^2\right)(80+\gamma)$

$\Rightarrow 491169069-700^3-\left(3\times700^2+3\times700\times80+80^2\right)80=\left(3\times780^2+3\times780\times\gamma+\gamma^2\right)\gamma$

令$\gamma=9$，代入上式…………觀察上式兩側數字，估算得$c=9$

$\Rightarrow 491169069-700^3-\left(3\times700^2+3\times700\times80+80^2\right)80=\left(3\times780^2+3\times780\times9+9^2\right)9$

$\Rightarrow 491169069-700^3-\left(3\times700^2+3\times700\times80+80^2\right)80-\left(3\times780^2+3\times780\times9+9^2\right)9$

$=491169069-343000000-131552000-16617069=0$

故 491169069 的立方根為$700+\beta=700+80+\gamma=700+80+9=789$

參、n 次方根

很明顯的，由前文中平方根與立方根的求法不難發現，此方法可推廣至 n 次方根，只要利用二項式定理將 $x^n=\left(a+b\right)^n$ 展開，首項 a^n 移至等號左側，而右側則提出 b ，此時令 $b=c+d$ 並且估算 c 的值使得等號兩側數字最接近，將 c 代入後乘開，再重複上述步驟直到求出所需要的位數即可，方法雖然有規律性變化，但是從實際的計算中可以發現，在估算最接近數字時，計算過程異常龐大，在進行三次或三次以上方根的計算時，若無計算機協助，以人工進行直式運算顯然不切實際，甚至不如採用十分逼近法恰當，然而在求次方根的過程中，同學仍可觀察到規律變化的優美性質，若是具有程式設計能力的同學，可嘗試設計開 n 次方根的演算法，這會是一個不錯的練習。